FUNCION EXPONENCIAL

1. Halla "x":

a) $2^{x+1} = 4^x$ b) $2^x = 1/16$ c) $3^{x+1} = 9^{x-2}$

d) $25^x = \sqrt{5}$ e) $25^x = \frac{1}{5}$ f) $3^{x^2-2} = 9$ g) $3^{2x-3} = 81$

h) $2^{x^2-3} = \frac{1}{4}$ i) $3^{x-1} = \sqrt[3]{3}$ j) $2^{x+1} = 16^x$ k) $3^{2x-1} = 81^x$

Sol: a) x= 1; b) x= -4; c) x= 5; d) x= 1/4; e) x= -1/2; f) x= "2; g) 7/2; h) x= "1; i) 4/3; j) 1/3; k) -1/2

2. Halla "x":

a) $27^{1/3} = x$ b) $x^{1/2} = 5$ c) $32^x = 2$ d) $x^{3/2} = 27$

e) $4^x = 32$ f) $x^{3/2} = 8$ g) $3^{2x} = 27$ h) $10^x = 0{,}001$

i) $\left(\frac{1}{10}\right)^x = 100$ j) $3^x = 9^{x+1}$ k) $9^{2x} = 27$ l) $2^{2x} = 8^2$

m) $10^{3x} = 100$ n) $10^{2x-1} = 0{,}01$

Sol: a) x= 3; b) x= 25; c) x= 1/5; d) x= 9; e) x= 5/2; f) x= 4; g) 3/2; h) x= -3; i) -2; j) -2; k) x= 3/4; l) x= 3; m) x= 2/3; n) x= -1/2

3. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $3^{x+2} \cdot 9^{x-1} \cdot 3^2$ b) $2^{x-1} \cdot 2^{x^2-1} \cdot 2^{3-x}$ c) $\frac{4^{x-2}}{8^{x-1}}$

d) $\frac{3^{x+1} + 3^x}{2 \cdot 9^x}$ e) $\frac{2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1}}{4^{x-2}}$ f) $\frac{e^{x-1} + e^{x+3}}{e^{4x}}$

g) $\frac{4^x \cdot 2^{3-x}}{2^{x+1} + 2^{x-1}}$ h) $\frac{3^{x+1} \cdot 9^x}{3^x \cdot 3^{x^2+1}}$ i) $\frac{e^{x+1} - e^{x-2}}{e^{2x-1}}$

Sol: a) 3^{3x+2}; b) 2^{x^2+1}; c) 2^{-x-1}; d) $2 \cdot 3^{-x}$; e) $7 \cdot 2^{3-x}$; f) $\left(\frac{1}{e} + e^3\right) e^{-3x}$; g) $\frac{2^4}{3}$; h) 3^{2x-x^2}; g) $\left(e^3 - 1\right) e^{-x-1}$

4. Resuelve:

a) $3^{-x} + 9^{x+1} = 4$ b) $3^{2x+3} = 2187$ c) $3^{\frac{x+1}{x-2}} = \frac{1}{9}$

d) $3^{x^2-3x+3} = 3$ e) $10^{\frac{x^2-1}{x+1}} = 10$ f) $3^{2x-1} - 3^{x+1} = 0$

g) $5^{2x+1} + 3 \cdot 5^{6x-3} = 500$ h) $4^{x-2} - 2^{x+1} = -12$ i) $3^{2\,(x+2)} - 4 \cdot 3^x - 77 = 0$

Sol: a) x= -1; b) x= 2; c) x= 1; d) x= 1, x= 2; e) x= 2; f) x= 2; g) 1; h) x= 3; i) x= 0

5. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3^{x+y} = 81 \\ 3^{y-x} = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{y-x} = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 20 \\ 2^{y+x} = 64 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{2x+1} - 3^{2y} = 23 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2^{2x-y} = 32 \\ 3^{x-2y} = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3^x \cdot 9^y = 3^8 \\ 2^{x-1} \cdot 2^{y+1} = 2^6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2 \cdot 3^{x+1} - 3^{y-1} = 15 \\ 5 \cdot 3^{x+2} - 3^{y+1} = 108 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -42 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 4 \cdot 3^{y-1} = 4 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2 \cdot 5^x - 2 \cdot 3^{y+2} = 32 \\ 5^x + 3^{y+1} = 28 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 3^x - 2^{y+1} = 235 \\ 3^{x-1} - 2^{y-1} = 79 \end{cases}$

Sol: a) x= 1, y= 3; b) x= 2, y= 3; c) x= 4, y= 2; x= 2, y= 4; d) x= 2, y= 1; e) x= 3, y= 1; f) x= 4, y= 2; g) x= 1, y= 2; h) x= 2, y= 3; i) x= 2, y= 0; j) x= 5, y= 2

6. Resuelve:

a) $e^{x-2} = e^{2(x-1)}$ b) $4^{x+1} = 2^{2x-3}$ c) $2^{x-1} = 8^{x-3}$

d) $3^{2x+1} - 9^{x+2} = -702$ e) $5^{3x-2} = 625$ f) $5^{x^2-x-6} = 1$

g) $3^{2x-1} - 3^{2x} = -54$ h) $4^x - 2^{x+2} = 32$ i) $5^{x-2} = 25^{x-3}$

Sol: a) x= 0; b) x= ; c) x= 4; d) x= 1; e) x= 2; f) x= -2, x= 3; g) x= 2; h) x= 3; i) x= 4

7. Resuelve:

a) $3^{2x+5} = 27^{x+2}$ b) $3^{x+1} + 3^{x-2} + 3^x + 3^{x-1} = 120$ c) $4^x + 2^{x-1} = \frac{1}{2}$

d) $2^{-x+5} = 8^{x+3}$ e) $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^x = 511$

f) $1 + 3 + 9 + 27 + ... + 3^x = 3280$ g) $1 + 4 + 16 + 64 + ... + 4^x = 1365$

h) $1 + 5 + 25 + 125 + ... + 5^x = 19531$ i) $1 + 6 + 36 + 216 + ... + 6^x = 55987$

j) $1 + 7 + 49 + 343 + ... + 7^x = 19608$ k) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x+1} + 2^{x-3} = 29$

Sol: a) x= -1; b) x= 3; c) x= -1; d) x= -1; e) x= 8; f) x= 7; g) x= 5; h) x= 6; i) x= 6; j) x= 5; k) x= 3

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3.3^x = 27$ b) $5.3^x = 405$ c) $2^x/4 = 4$ d) $4^{2x+1} = 1/4$

Sol: a) x= 2; b) x= 4; c) x= 4; d) x= -1

9. Las siguientes ecuaciones exponenciales tienen soluciones enteras. Hállalas:

a) $2^{x^2} = 16$ b) $3^{x-3} = 81$ c) $\sqrt{3^x} = \frac{1}{9}$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{3}$

Sol: a) x= 2; b) x= 7; c) x= -4; d) x= -1/2

10. Resuelve mediante un cambio de variable:

a) $2^{2x}-3.2^x-4= 0$ b) $3^x+ 3^{x-1}-3^{x-2}= 11$ c) $2^x+ 2^{-x}= 65/8$

Sol: a) x= 2; b) x= 2; c) x= 3, x= -3

11. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3^{x+2} = 729$ b) $2^{3x-2} = 16$ c) $5^x+ 5^{x+1} = 750$ d) $1000^{2+x} = 1$

EJERCICIOS DE LOGARITMOS

Ejercicio 1.- Halla el valor de x en las siguientes expresiones:

(a) $\log_x 25 = 2$

(b) $\log_x 216 = 3$

(c) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$

(d) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$

(e) $\log_x 3 = \frac{1}{2}$

(f) $\log_x 343 = 3$

(g) $\log_x \frac{1}{64} = -6$

(h) $\log_x 5 = -\frac{1}{2}$

(i) $\log_x \frac{1}{100} = -2$

(j) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$

(k) $\log_x 81 = -4$

(l) $\log_x 49 = 2$

Ejercicio 2.- Calcula el valor de las siguientes expresiones:

(a) $\log_2 \frac{\sqrt[6]{64} \cdot 4^2}{2^5 \cdot \sqrt[3]{512}}$ (b) $\log_3 \frac{27 \cdot \sqrt{729}}{81 \cdot \sqrt[3]{27}}$ (c) $\log_5 \frac{25 \cdot \sqrt[4]{625}}{125}$ (d) $\log_7 \frac{49 \cdot \sqrt[3]{343}}{\sqrt{2401}}$

Ejercicio 3.- Sabiendo que $\log 2 \approx 0{,}3$ y que $\log 3 \approx 0{,}48$, calcula estos logaritmos decimales.

(a) log 4
(b) log 5
(c) log 6
(d) log 8
(e) log 12
(f) log 15
(g) log 18
(h) log 24
(i) log 25
(j) log 30
(k) log 36
(l) log 40
(m) log 45
(n) log 60
(o) log 72
(p) log 75

Ejercicio 4.- Conociendo los valores de log 2 y log 3, halla los valores de las siguientes expresiones:

(a) $\log 14{,}4$

(b) $\log 0{,}048$

(c) $\log 2{,}88$

(d) $\log 0{,}015$

(e) $\log 3600$

(f) $\log \sqrt{5{,}76}$

(g) $\log \sqrt[3]{240}$

(h) $\log \frac{\sqrt{5{,}4}}{12{,}8}$

(i) $\log \frac{10{,}8}{\sqrt{14{,}4}}$

(j) $\log 6{,}4 \cdot \sqrt{2{,}4}$

(k) $\log \frac{1{,}25}{\sqrt{0{,}32}}$

(l) $\log \sqrt{3{,}2} \cdot \sqrt{1{,}6}$

(m) $\log \frac{\sqrt{0{,}025}}{8}$

(n) $\log \frac{3{,}2^3 \cdot 0{,}64^5}{0{,}0125 \cdot \sqrt[4]{80^3}}$

(o) $\log \frac{1}{6561}$

(p) $\log \left(\frac{12}{5}\right)^5$

(q) $\log \sqrt[3]{\frac{9}{5}}$

(r) $\log \sqrt[4]{781{,}25}$

Ejercicio 5.-

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

(a) $\log\sqrt{3x+4}+\frac{1}{2}\log(5x+1)=1+\log 3$

(b) $(x^2-5x+9)\log 2+\log 125=3$

(c) $(x^2-4x+7)\log 5+\log 16=4$

(d) $3\log x-\log 32=\log\frac{x}{2}$

(e) $2\log x=\log\frac{x}{2}-1$

(f) $5\log\frac{x}{5}+2\log\frac{x}{3}=3\log x-\log\frac{32}{9}$

(g) $2\log x=3+\log\frac{x}{10}$

(h) $2\log x-\log(x-16)=2$

(i) $\log(5x-3)^2+\log(2x+3)^3=2$

(j) $\log\sqrt{3x+1}-\log\sqrt{2x-3}=1-\log 5$

(k) $\frac{\log 3+\log(11-x^3)}{\log(5-x)}=2$

(l) $\log(28-x^3)-3\log(4-x)=0$

Ejercicio 6.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas:

(a) $\begin{cases} x+y=70 \\ \log x+\log y=3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x^2-y^2=11 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x-y=8 \\ \log_2 x+\log_2 y=7 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \log x+\log 5=3\log 5 \\ \log x^3+\log y^3=6 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2\log x-3\log y=7 \\ \log x+\log y=1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \log x+3\log y=5 \\ \log\frac{x^2}{y}=3 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \log x+\log y=3 \\ 2\log x-2\log y=-2 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x+y=22 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} \log_x(y-18)=2 \\ \log_y(x+3)=\frac{1}{2} \end{cases}$

(j) $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 33 \\ 2^{x+y}=2^{11} \end{cases}$

COMPLEJOS

EJERCICIO 1 : Calcula en forma binómica y representa gráficamente la solución:

a) $\frac{(3-i)i^3}{1-2i}$ b) $\frac{13i^4(2-i)}{3-2i}$ c) $\frac{-10i^7(2-3i)}{4+2i}$

d) $\frac{25i^{21}(1-7i)}{1+7i}$ e) $\frac{(3-i)^2}{1+i}$ f) $\frac{5i^{10}(1-i)}{3-i}$

EJERCICIO 2 :
a) Representa gráficamente el número $z = -1 - i$ y halla su opuesto y su conjugado.
b) Expresa en forma polar $z = -1 - i$.

EJERCICIO 3 : Considera el número complejo $z = 2 - 2\sqrt{3}i$.
a) Represéntalo gráficamente y escribe su opuesto y su conjugado.
b) Expresa z en forma polar.

EJERCICIO 4 :
a) Expresa en forma binómica el número complejo $z = 6_{210^\circ}$ y represéntalo gráficamente.
b) Escribe el opuesto y el conjugado de z.

EJERCICIO 5 : Calcula el valor de z^6, sabiendo que $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

EJERCICIO 6 : Calcula la cuarta potencia del número complejo $z = -2 + 2\sqrt{3}i$.

EJERCICIO 7 : Halla las raíces cuartas de 16 y represéntalas gráficamente. ¿Qué figura obtienes si unes los afijos de las raíces obtenidas?

EJERCICIO 8 :
Representa gráficamente los resultados de hallar $\sqrt[3]{1-i}$. ¿Qué figura obtenemos al unir los afijos de las raíces obtenidas?

EJERCICIO 9 : Halla las raíces sextas de -1 e interpreta gráficamente los resultados obtenidos.

EJERCICIO 10 : Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $3z^4 + 27z^2 = 0$ b) $ix^3 + 8 = 0$ c) $2z^6 + 2 = 0$

EJERCICIO 11 :
Representa $z = 2 - 2i$, su opuesto y su conjugado, y exprésalos en forma polar.

EJERCICIO 12 : Calcula z^8, sabiendo que $z = 1 + \sqrt{3}i$.

EJERCICIO 13 : Halla los números complejos, z, que cumplen la siguiente igualdad:
$z^3 + 64 = 0$

EJERCICIO 14 : Calcula: $\sqrt[4]{-81}$

EJERCICIO 15 : Halla un número complejo, z, sabiendo que una de sus raíces quintas es $2-2i$.

EJERCICIO 16

a) Dado el número complejo $z=1-\sqrt{3}i$, escribe su opuesto y su conjugado, y representa los tres números.

b) Escribe z, $-z$ y $\bar{z}$ en forma polar.

EJERCICIO 17 : Escribe el opuesto y el conjugado de $z=2\sqrt{3}-2i$.
Escribe los tres números en forma polar y represéntalos.

EJERCICIO 18

a) Escribe en forma binómica $z=2_{30^\circ}$

b) Halla su opuesto y su conjugado en forma binómica y polar.

c) Representa z, $-z$ y $\bar{z}$.

EJERCICIO 19

a) Expresa en forma polar $z=\sqrt{3}-i$.

b) Escribe en forma binómica y en forma polar el opuesto y el conjugado de z.

c) Representa z, $-z$ y $\bar{z}$.

EJERCICIO 20 : Calcula:

a) $\dfrac{(2-3i)i^{25}}{(-1+2i)}$ b) $\sqrt[4]{-81}$ c) $\dfrac{(1-3i)}{(3-4i)}+i^{37}$ d) $\sqrt[3]{2-2i}$ e) $\dfrac{i^{30}(2+3i)}{(4-i)}$

f) $\sqrt[4]{-1}$ g) $\sqrt[3]{27i}$ h) $\dfrac{(2+2i)}{-1+3i}-i^{28}$ i) $\dfrac{(7-i)i^{43}}{-2+i}$ j) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$

EJERCICIO 21 : Calcular x para que $\dfrac{x+9i}{3-i}$ sea un número imaginario puro.

EJERCICIO 22 : El número complejo de módulo 12 y argumento 150º es el producto de dos número complejos, uno de los cuales es el número 4. Di cuál es el otro y exprésalo en forma binómica.

EJERCICIO 23 : El producto de un número complejo de argumento 60º por otro de módulo 5 nos da como resultado el número complejo $-6+6\sqrt{3}\,i$. Halla el módulo del primero y el argumento del segundo.

EJERCICIO 24 : Halla dos números complejos conjugados cuyo cociente sea un imaginario puro y su diferencia sea 4i.

EJERCICIO 25 : Un cuadrado con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto A(3,4). Calcular los demás vértices.

EJERCICIO 26 : Calcular dos números complejos cuya suma es un número real, su diferencia tiene por parte real –1 y su producto vale 15 + 3i

TRIGONOMETRÍA

1.-Dos aviones que se encuentran a a5 y 8 Km de un aeropuerto C se observan desde éste bajo un ángulo de 38º. Calcular la distancia que separa dichos aviones.

2.- Para colgar una bombilla del techo, se la hace pasar por una cuerda que se clava de sus extremos en dos puntos situados a una distancia de 140cm.Los ángulos que forma la cuerda con el techo son de 40º, y de 60º. Hallar la longitud total de la cuerda y a que distancia cuelga la bombilla del techo.

3.- Las diagonales de un paralelogramo miden 6 y 14 cm , y forman un ángulo de 75º. Hallar el perímetro y los ángulos del paralelogramo.

4.-Calcular el área y el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 3cm.

5.- Hallar el perímetro y el área de un hexágono regular de 8 cm de lado.

6.-Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables que forman con la antena ángulos de 36º y 48º.Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pié de la antena y distan entre si 98m.Calcula la altura de la antena.

7.- Resolver los siguientes sistemas trigonométricas :

a) $\left.\begin{array}{r} senx + seny = 1 \\ 2x + 2y = 180^{o} \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} senx + \cos y = \sqrt{2} \\ x - y = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} senx + \cos y = \dfrac{1}{2} \\ \cos ecx + \sec y = -1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} senx + \cos y = \sqrt{2} \\ \cos ecx + \sec y = 2\sqrt{2} \end{array}\right\}$ e) $\left.\begin{array}{r} senx \cdot \cos y = \dfrac{3}{4} \\ \cos x \cdot seny = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{r} senx + seny = 1 \\ \cos x + \cos y = \sqrt{3} \end{array}\right\}$

8.- Expresar en radianes los siguientes ángulos : 30º, 60º, 75º, 225º, 315º, 330º

9.- Expresar en grados sexagesimales : $\frac{3\pi}{4} rad$; $\frac{5\pi}{3} rad$; $\frac{3\pi}{2} rad$; $\frac{9\pi}{10} rad$

10.- Hallar las razones trigonométricas de 120º ; 210º ; 135º ; 225º ; 960º ; -2010º; - $\frac{132\pi}{12} rad$

11.- Sabiendo que cotg $\alpha = -3$ y sen $\alpha > 0$, halla :

a) demás razones trigonométricas de α. b) sen (90-α) c) cos(90+α) d) tg (180-α)

e) cotg (180+α) f) sec(360- α) g) cosec(360+α)

12.- Sabiendo que cosec x= $\sqrt{3}$ y tgx < 0 ; y tg y = $\frac{1}{3}$ y cosy < 0 , calcular :

a) razones trig de x b) razones trig de y c) las de x+y d) las de x-y e) 2x f) $\frac{y}{2}$

13.- Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas :

a) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ b) cosx + sen $^2 x = 1$ c) sen $^3 x - senx = 0$

d) tg $^3 x - tgx = 0$ e) sen $^2 x - \cos 2x = 1 + senx - \cos^2 x$ f) sen2x = 4cosx

g) $8sen^4 x - 6sen^2 x + 1 = 0$ h) $8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3 = 0$ i) $6sen^3 x - 11sen^2 x + 6senx - 1 = 0$

j) $2\cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$ k) tgx·tg2x =1 l) 6cos2x+6sen ^{2} x = 5 +senx

m) 4sen $\frac{x}{2} + 2\cos$ x = 3 n) $\frac{senx}{3} - sen\frac{x}{2} = 0$ ñ) $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{tg\alpha - 2}{tg\alpha + 2}$

o) $3 \cdot tg^2\alpha = 1 + 2 \cdot tg\alpha$ p) $sen\alpha + \cos ec\alpha = \frac{5}{2}$ q) $tg2\alpha = -tg\alpha$

14.- Comprobar si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas:

a) $2\,sen^2 x + \cos 2x = 1$ b) cos2x- 2cos ^{2} x = -1 c) $\left(sen\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - senx$

d) $\frac{(senx + \cos x)^2 - 1}{\cot gx - senx \cdot \cos x} = 2tg^2 x$ e) $\frac{1 + 2sen2x + \cos 2x}{2 + sen2x - 2\cos 2x} = \cot gx$ f) $\frac{sen(45 + x)}{\cos 45 \cdot \cos x} = 1 + tgx$

15.- Simplificar :

a) $sen^4 x - \cos^4 x =$ b) sen $^3 x + senx \cdot \cos^2 x =$ c) $\sqrt{1 - senx} \cdot \sqrt{1 + senx} =$

d) $\frac{\cos ecx}{1 + \cot g^2 x} =$ e) $\frac{\sec^2 x - \cos^2 x}{tg^2 x} =$

16.-Resolver los siguientes **triángulos rectángulos en A** , conociendo :

a) b= 3 cm ; c= 4 cm b) a= 13 cm; b = 5 cm ; c) B =30º ; b= 5 cm d) c= 23 cm; B =62º 26'

17.- Resolver los siguientes triángulos isósceles (A y C son los angulos iguales,b la base , h la altura):

a) A = 68º 57' b) l= 75 m ; b = 102 m c) A = 27º 8' 20" ; b= 3'7m d) b=14m; h= 15 m

18.-Resolver los siguientes triángulos:

a) a=5 cm;b=7cm; C=40º b) a=3 cm; b=3cm; c= 5 cm c) b= 5 cm ;C=30º ; c= 7 cm

d) B= 42º;C= 54º; a =10cm e) a= 5 cm; b= 4 cm; A= 40º f) a= 40cm; b= 50 cm; B= 36 º

19.- Desde la orilla de un rio se ve un árbol bajo un ángulo de 45º.Si el rio tiene una anchura de 20m, calcular la altura del árbol.

20.-Desde un punto situado a ras del suelo, se ve la copa de un árbol bajo un ángulo de 60º, y si nos acercamos 5 m el ángulo es de 70º.Hallar la altura del árbol.

21.-Una escalera de 30m de largo, se sitúa en un punto de una calle y se apoya sobre una pared formando un ángulo de 60º con el suelo, y desde ese mismo punto, se apoya sobre la otra pared formando un ángulo de 45º.Hallar la altura que alcanza la escalera sobre cada pared y la anchura de la calle.

<u>VECTORES EN EL PLANO</u>

22.- Sean $\vec{v}$ (2, 3) ; $\vec{w}$ (5, -2). Calcular gráfica y analíticamente :

a) $\vec{v} + \vec{w}$ b) $\vec{v} - \vec{w}$ c) $3 \cdot \vec{v} - 2 \cdot \vec{w}$

23.- Dados los puntos A(1,2) ; B(2,-3) , calcular el vector $\overrightarrow{AB}$. Hallar el punto D para que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, siendo C(-3,1)

24.-a) comprobar si están alineados los puntos A(2,-1) ; B(6,1) ; C(8,2)

b) calcular “m” para que P(1,4); Q(5,-2) y R(6,m) estén alineados.

c) hallar el punto medio del segmento $\overline{AB}$, siendo A(-5,2) ; B(7,-4)

d) hallar el simétrico del punto A(-5,4) respecto del punto P(2,-1)

e) sean M(7,4) ; N(-2,1). Hallar un punto P del segmento $\overline{MN}$ tal que la distancia de M a P sea la mitad de la distancia de P a N.

25.- Dados los vectores $\vec{v}(2,-3)$, $\overline{w}(5,4)$, calcular :

a) $\vec{v}\cdot\vec{w}$ b) $|\vec{v}|$, $|\vec{\mathrm{w}}|$ c) ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{\mathrm{w}}$

26.- Dados los vectores $\vec{v}(1,2)$, $\vec{\mathrm{w}}(3,-1)$, $\vec{\mathrm{z}}(-2,-1)$, calcula :

a) $(\vec{v}+\vec{w})\vec{z}$ b) $\vec{v}\cdot\vec{z}+\vec{w}\cdot\vec{z}$ c) $(3\cdot\vec{v})\vec{w}$ d) $2\cdot\vec{v}+\vec{w}(\vec{v}-\vec{z})$

27.- Dados los puntos A(2,1) ; B(3,-2) ; C(0,-3) , calcular :

a) ángulo que forman $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. ¿ son perpendiculares estos vectores?

b) “ “ “ $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

28.- Dado el vector $\vec{v}(5,-k)$, calcular “k” para que :

a) sea ortogonal a $\vec{w}(4,-2)$ b) su módulo sea $\sqrt{34}$

29.- Si $|\vec{v}| = 2$; $|\vec{\mathrm{w}}| = 5$ y el ángulo que forman es de 60º, calcula $|\vec{v}+\vec{w}|$; $|\vec{\mathrm{v}}-\vec{w}|$

NOTA : todos los ejercicios debéis representarlos gráficamente.

ECUACIONES DE LA RECTA

30.-Hallar todas las ecuaciones de la recta que pasa por A(-3,2) y tiene de vector director $\vec{v}(2,-1)$. Calcula tres puntos cualesquiera de la recta.

31.-Idem de la recta que pasa por A(-5,3) ; B(1, 1)

32.- Idem de la recta que pasa por A(-2,1) y es paralela a la recta r $\equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -3+\lambda \end{cases}$

33.- Idem de la recta que pasa por A(5, -4) y tiene de pendiente m= $\frac{-3}{4}$

34.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(0,2) y es paralela a la bisectriz del 2º cuadrante.

35.- Ecuación de la recta paralela a 2x-3y+6=0 y cuya ordenada en el origen el 5.

36.- “ “ “ “ perpendicular a y=2x-1 y pasa por el origen de coordenadas.

37.- Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas (si se cortan, hallar los puntos de corte) :

a) r $\equiv \begin{cases} x = 5-t \\ y = 3t \end{cases}$ s $\equiv \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 6-3t \end{cases}$

b) r $\equiv \begin{cases} x = 2+t \\ y = 5-3t \end{cases}$ s $\equiv \frac{x}{2} = \frac{y-11}{-6}$

c) r $\equiv y = -3x-6$ s $\equiv 2x - y = 1$

d) r $\equiv (x,y) = (6,-2) + t\cdot(3,1)$ s $\equiv 6x+2y+8 = 0$

e) r $\equiv 3x+4y-5 = 0$ s $\equiv x-3y-6 = 0$

38.- María y Nacho salieron hace 6 horas de dos puntos y siguieron respectivamente las trayectorias siguientes :

$(x, y) = (7, 3)+ t\cdot (1, \frac{1}{2})$; $(x, y) = (6,4) +t\cdot (1, \frac{1}{3})$

Donde t representa el tiempo en horas, siendo el instante actual t =0

a) ¿en qué punto se encuentran ahora? ¿de qué punto salieron?
b) ¿se cruzan sus caminos? Si es así, ¿en qué punto?
c) ¿se encontrarán si mantienen su marcha?

39.- Dadas las rectas $r \equiv 3y + x + m = 0$; $s \equiv 2x - ny + 5 = 0$, hallar "m" y "n" para

a) sean paralelas b) perpendiculares. c) se corten en P(2,1)

NOTA : todos los ejercicios debéis representarlos gráficamente.

GEOMETRIA EN EL PLANO.

40.- Hallar el ángulo que forman las rectas :

a) $\begin{cases} r \equiv y = 3x + 5 \\ s \equiv 2x - y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r \equiv y = -2x + 1 \\ s \equiv (x, y) = (-3,5) + \lambda(1,-2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} r \equiv 3x + 4y - 1 = 0 \\ s \equiv 4x - 3y + 3 = 0 \end{cases}$

41.- A(2,-3) ; B(-2, -1) ; C(0,3) son vértices de un triángulo. Se pide :

a) clasificarlo según lados y ángulos.
b) ecuación de la mediana del vértice A c) ecuación de la altura del vértice B
d) ecuación de la mediatriz del lado AB e) calcular su área.
f) Hallar un punto D para que ABCD sea un paralelogramo. Con los datos obtenidos antes, ¿qué paralelogramo es?

42.- Idem para el triángulo de vértices A(1,1) ; B(5,3) ; C(-2, 4)

43.- El área de un triángulo ABC es de 15 u^2 , siendo A(0,1) ; B(6,4) . Calcular C sabiendo que tiene abscisa positiva y está sobre la recta y= x+5

44.- B(-1,3) ; C(3,-3) son vértices de un triángulo isósceles que tiene el vértice A sobre la recta x+2y-15=0 , siendo AB y AC los lados iguales. Hallar el vértice A, el ortocentro, el baricentro, y circuncentro.

45.-Un rombo tiene el vértice A en el eje de abscisas. Otos dos vértices opuestos son B(3,1) y D(-5,-3). Hallar los vértices que faltan.

46.-Hallar las bisectrices de:

a) $\begin{cases} r \equiv 5x + 12y - 60 = 0 \\ s \equiv eje \text{ de } ordenadas \end{cases}$ b) $\begin{cases} r \equiv 3x - 4y + 1 = 0 \\ s \equiv 5x + 12y - 7 = 0 \end{cases}$

47.- A(2,1) ; B(-3,5) ; C(4,m) son vértices de un triángulo de área 6. Hallar "m"

48.-Hallar las ecuaciones de las rectas que pasando por A(1,-2) disten 2 unidades de B(3,1)

49.- Hallar el área del paralelogramo OABC sabiendo que el lado OA es la recta x-2y=0; OC la recta 3x+y=0 y el vértice B es B(3,5). Clasificarlo,y hallar las ecuaciones de las diagonales.

50.-El triángulo ABC es rectángulo en A, siendo A(3,5) ;B(1,3) ; C(m,10) .Hallar "m".

51.-A(2,0) ; B(3,5) ; C(-1, 4) son vértices de un paralelogramo. Calcular :

a) vértice D b) Ecuaciones de las diagonales. c) área d) clasificarlo.

52.- De un paralelogramo ABCD se conocen A(1,-2) ; B(-3,2) y el centro del paralelogramo M(2,1). Calcular:

a) ecuación de la recta paralela a AB pasando por M

b) " " " " perpendicular a AB pasando por M

c) Vértices C y D

d) área

e) clasificarlo.

53.- De un rectángulo ABCD se conocen el lado AB: $5x+3y-34=0$; B(8,-2) y D(0,0). Calcular:

a) ecuaciones de los otros tres lados.

b) vértices A y C

c) área.

54.-Hallar el área de un triángulo determinado por el punto C(-1,3) y los puntos de intersección con los ejes de coordenadas de la recta que pasa por los puntos A(3, -1) y B(1,4)

55.- De un triángulo ABC se conocen A(2,5) ; el punto medio de BC es (3,1) y el punto medio de AB es (0,4). Hallar B, C y el área.

56.- El eje OX y las rectas $r \equiv y=1$; $s \equiv x+2y=3$; $t \equiv x+2y-7=0$ determinan un cuadrilátero. Hallar su área , las ecuaciones de las diagonales y el punto de corte de éstas.

57.- Por el punto P(2,6) , se trazan dos rectas perpendiculares a las bisectrices del 1º y 2º cuadrante. Hallar :

a) las ecuaciones de dichas rectas.

b) coordenadas de los otros vértices del triángulo formado por la recta $3x-13y-8=0$ con dichas rectas.

NOTA: Todos los ejercicios deben representarse gráficamente.

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL.

84.-Calcular los dominios de las siguientes funciones :

a) f(x) = $\dfrac{13x}{x^2+2x-3}$ b) f(x) = $\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{3x+1}{x-4}$ c) f(x) = $\sqrt[4]{\dfrac{3x+1}{x-5}}$

d) f(x) = $\sqrt[5]{\dfrac{4x}{2x^3-3x^2-8x-3}}$ e) f(x) = $\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}$ f) f(x) = $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+5}$

g) f(x) = $\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+5}}$ h) f(x) = $\log_3\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)$ i) f(x) = $\dfrac{2x}{\log_2(x-5)}$

j) f(x) =$e^{\frac{x+5}{x-2}}$ k) f(x) = $\dfrac{e^{x+5}}{x-2}$ l) f(x) =sen$\left(\dfrac{x+3}{x^3-x}\right)$

m) f(x) = $\dfrac{cox(x+3)}{x^3+x}$

85.- Calcular f+g ; f-g ; f·g ; $\dfrac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}}$; siendo :

a) f(x) = $\begin{cases} 3x-1 & \text{si } x<0 \\ x^2+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ g(x) = $\begin{cases} x+2 & \text{si } x\leq -2 \\ 5 & \text{si } x>-2 \end{cases}$

b) f(x) = $\begin{cases} x+1 & \text{si } x<1 \\ 3 & \text{si } x>1 \end{cases}$ g(x) = $\begin{cases} x^2 & \text{si } x\leq 3 \\ 5-x & \text{si } x>3 \end{cases}$

86.- Calcular (g o f)(x) y (f o g)(x) (la composición) para:

a) $\begin{cases} f(x)=x^2-3 \\ g(x)=\dfrac{3x}{2x+1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(x)=3x+e^x \\ g(x)=x^2-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} f(x)=sen(x^2+2) \\ g(x)=2x-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} f(x)=\log x+\cos^2 x \\ g(x)=e^{2x} \end{cases}$ e) $\begin{cases} f(x)=3\cdot x^2-5 \\ g(x)=\sqrt{x+2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} f(x)=x^2+3 \\ g(x)=2x-1 \end{cases}$

87.- Calcular la función inversa (“recíproca”) de las funciones :

a) f(x) = $\dfrac{x}{3x-2}$ b) g(x) = $\sqrt[3]{2x-5}$ c) h(x) = log(x+5)

d) f(x) = $\sqrt[5]{\dfrac{x+2}{3x-1}}$ e) g(x) =e $^{x^2-5}$ f) h(x) = $5x^3-2$

88.- Representa gráficamente las siguientes funciones, y calcula su dominio, recorrido, cotas, monotonía y continuidad :

a) f(x) = $\begin{cases} 3x & \text{si } x\leq -1 \\ x-4 & \text{si } x>-1 \end{cases}$ b) f(x) = $\begin{cases} 3 & \text{si } x\leq -2 \\ -x^2+1 & \text{si } -2<x<1 \\ x-1 & \text{si } x>5 \end{cases}$

89.- Calcular los siguientes límites :

a) $\lim\limits_{x\to -1} \left(x^2-5x+4\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}(x-5)^{3x-4}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{3x-1}{5x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x-10}{3x^2-5x-2}$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x-\sqrt{3x-2}}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$ h) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+\sqrt{x+2}}$ i) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+x}{x^2-1}$

o) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)$ p) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(2x-\sqrt{x^2-1}\right)$ q) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-5x}\right)$

r) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x+7}{x-3}-\sqrt{x+6}\right)$ s) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^3-3x^2+4x-6}+\sqrt{5x^2+8x-7}\right)$

CÁLCULO DIFERENCIAL

90.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones :

a) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & si \quad x<-2 \\ x^2+1 & si \quad -2\le x<1 \\ 2x & si \quad x\ge 1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{x+4} & \text{si } x<3 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$

91.- Calcular “a” y “b” para que sea continua :

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x\le -3 \\ ax+5 & \text{si } -3\le x\le 2 \\ 3x+b & \text{si } x>2 \end{cases}$$

92.- Calcula, usando la definición, :

a) $f'(2)$ siendo $f(x)=(x+1)^2$

b) $f'(-1)$ “ $f(x)=\dfrac{3x}{x+2}$

93.- Estudiar la derivabilidad de :

a) $f(x)=\begin{cases} 3x-5 & \text{si } x<2 \\ x-1 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le -1 \\ 4+2x & \text{si } x>-1 \end{cases}$

94.- Calcular “a” y “b” para que sea derivable:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le 2 \\ ax+b & si\ \ x>2 \end{cases}$$

95.- Calcular la ecuación de la recta tangente a :

a) $f(x)=x^2-1$ en el punto $x_0=2$

b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$ en el punto $x_0=4$

e) $f(x)=e^{2x}$ en $x_0=0$

f) $f(x)=Lnx$ en $x_0=0$

c) $f(x)=x^2-8x+2$ en $x_0=3$

d) $f(x)=sen^2x$ en $x_0=\dfrac{\pi}{4}$

96.- Averigua:

a) ¿en qué punto de la función $f(x)=x^2-3x-4$ la recta tangente es $r\equiv 3x-4$?

b) ¿Existe algún valor de x en el que la recta tangente a $f(x)=x^2+6x+5$ sea paralela a la recta tangente a $g(x)=x^3-\dfrac{x}{2}$

97.-Estudiar la derivabilidad de las funciones :

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} & \text{si } x\le 0 \\ x^2-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} & \text{si } x\le -2 \\ ax^2+bx+1 & \text{si } x>-2 \end{cases}$

98.- Derivar las siguientes funciones, dando el resultado lo más simplificado posible :

a) $f(x)=x^3-3x^2+4$

b) $f(x)=3x^5\cdot(4x^2+1)$

c) $f(x)=)\dfrac{5x^3-3x}{4x^2+5}$

d) $f(x)=e^{5x^4-3x^2}$

e) $f(x)=\log_2(x^5-3x^4+1)$

f) $f(x)=sen(5x^6-4x^2+x)$

g) $f(x)=arctg(5x^3+2)$

h) $f(x)=\dfrac{2x+5}{(3x-1)^2}$

i) $f(x)=sen^2x+senx^2$

j) $f(x)=senx\cdot e^{-x}$

k) $f(x)=\cos(x^3+2)Ln(x^5+3x)$

l) $f(x)=\dfrac{2^{x^3-2x}}{arctg(5x-1)}$

m) $f(x)=\dfrac{x^2}{Lnx}$

n) $f(x)=\sqrt{tg(x+3)}$

ñ) $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-3}}$

o) $f(x)=Ln^2(3x^5-\cos x)$

p) $f(x)=2^{x^4-3x}\sqrt{3x+1}$

q) $f(x)=sen^3\left[\cos(3x+e^{5x})^2\right]$

r) $f(x)=\log_5\left(x^{-3}+\sqrt{x^2+1}\right)$

s) $f(x)=\cos(x\cdot e^{-x})$

DERIVADAS.

99.- Derivar las siguientes funciones :

a) $y=4x^3\cdot Ln(x-1)$

b) $y=\sqrt[3]{x^4-3x+7}$

c) y = $\left(2x^3-7x^{-2}+8x-23\right)^9$

d) $y=e^x\cdot\cos x$

e) $y=5^x+x^5$

f) $y=3^x\cdot x^3$

g) $y=Ln\sqrt{senx}$

h) $y=sen^5x-\cos x^5$

i) $y=\sqrt{sen(Lnx)}$

j) $y=sen\left(Ln\sqrt{x}\right)$

k) $y=sen\sqrt{x}\cdot Lnx$

l) $y=2^{sen\sqrt{x}}$

m) $y=\dfrac{tgx+3}{Ln(x+3)}$

n) $y=x^{tgx}$

n) $y=\dfrac{e^{tgx}+4}{\sqrt{\cos x}}$

ñ) $y=arcsen\left(1+x^2\right)$

o) $y=arctg\sqrt{1+x^2}$

s) $y=\dfrac{arctgx}{sen^4x}$

t) $y=e^{x^2}\cdot arcsen(x-1)$

u) $y=\sqrt[5]{Ln\left(\dfrac{x^2+1}{\cos x}\right)}$

v) $y=\dfrac{8}{\cot gx}$

w) $y=\dfrac{\cos x}{Lnx}$

100- Deriva y simplifica :

a) $y=\dfrac{1+senxx}{1-senxx}$

b) $y=\sqrt{\dfrac{1+senx}{1-semx}}$

c) $y=Ln\sqrt{\dfrac{1+senx}{1-senx}}$

d) $y=Ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

e) $y=Ln\left(\dfrac{1+senx}{1-senx}\right)$

f) $y=\dfrac{1}{2\cos^2x}+Ln\cos x$

g) $y=\dfrac{1}{2\cos^2x}+Ln\cos x$

h) $y=arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

i) $y=Ln\dfrac{1+\sqrt{senx}}{1-\sqrt{senx}}+2\cdot arctg\sqrt{senx}$

101.- Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones : (recuerda que la condición necesaria para que una función sea derivable es que sea contínua) :

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+4 & \text{si } x\le 0 \\ (x+2)^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+4x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x>1 \\ 2-x & \text{si } x\le 1 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} e^{x} & \text{si } x\le 0 \\ 1-x^{2} & \text{si } 0<x\le 1 \\ x & \text{si } x>1 \end{cases}$

4.- Hallar "a" y "b" para que sean derivables :

a) $f(x)=\begin{cases} x^{2}-ax+b & \text{si } x\le 1 \\ a\cdot Lnx & \text{si } x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} a\cdot(1+e^{x}) & \text{si } x>0 \\ b+Ln(x+1) & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

102.- Responde razonadamente:

a) ¿Geométricamente, la derivada de una función en un punto qué representa?

b) ¿en qué puntos de la gráfica $f(x)=x^{3}-1$ la pendiente de la recta tangente es 3?

103.- Se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a $x^{2}+y^{2}-6y-16=0$ en el punto de abscisa 3 y ordenada negativa.

b) Ídem en el punto de ordenada 0 y abscisa positiva. (¿qué cónica es? Dibújala y te ayudará a resolver el ejercicio)

<u>GRÁFICAS DE FUNCIONES</u>

104.-Representar gráficamente las siguientes funciones:

1.- $y=x^{3}-3x+2$

2.- $y=x^{3}-6x^{2}+9x$

3.- $y=x^{3}-x$

4.- $y=x^{4}-5x^{2}+4$

5.- $y=x^{4}-2x^{2}+1$

6.- $y=|2x+4|$

7.- $y=|x^{2}-4x+3|$

8.- $y=\dfrac{x-1}{x+2}$

9.- $y=\dfrac{x}{x-1}$

10.- $y=\dfrac{2x}{x+3}$

11.- $y=\dfrac{x^{2}-1}{x^{2}}$

12.- $y=\dfrac{x^{2}}{x^{2}+1}$

13.- $y=\dfrac{2x^{2}}{x^{2}-1}$

14.- $y=\dfrac{4x-8}{(x-1)^{2}}$

15.- $y=\dfrac{x^{3}}{(x-1)^{2}}$

16.- $y=\dfrac{(x-1)^{2}}{x+1}$

17.- $y=\dfrac{x^{2}+9}{x}$

18.- $y=\dfrac{9x-9}{(x-2)^{2}}$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

105.- Descomponer el número 49 en el producto de dos factores de tal forma que la suma de éstos sea mínimo.

106.- Descomponer el número 98 en dos sumandos tales que la suma de sus raíces cuadradas sea máxima.

107.- Una finca rectangular tiene 400 m^2 de superficie. Calcula las dimensiones de los lados para que el perímetro sea mínimo.

108.- Con cartulinas de 5x8 dm una empresa quiere fabricar cajas sin tapa, cortando cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblándola. ¿Cómo debe cortar los cuadrados para que la capacidad de la caja sea máxima?

109.- Se quiere hacer un depósito abierto con base cuadrada y de 108 l de capacidad. Elegir las dimensiones para que la superficie del depósito sea mínima.

110.- Una hoja de papel debe contener 16 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm cada uno, y los márgenes laterales de 1 cm. Se pide calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto del papel sea mínimo.

111.- Hallar los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa 2 cm que engendra al girar alrededor de uno de sus catetos el cono de volumen máximo. ($V = 1/3\ \pi\ r^2h$)

112.- A una ventana de 1 m^2 de área se le quiere construir un marco de madera. El coste por cada metro de altura de la ventana es 1,25 € y por cada metro de ancho es 0,80 €. Hallar las dimensiones del marco más económico?